Ensembles

Exercice 1: Soit E un ensemble et soit $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Montrer que

$$A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$$

Exercice 2: Décrire les éléments de $\mathcal{P}(\{0;1\})$ puis de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0;1\}))$.

Exercice 3: Soit $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$.

1. Montrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
2. Comparer $\mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
3. Comparer $\mathcal{P}(A \times B)$ et $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

Exercice 4: Soit E un ensemble et soit $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$.

1. On souhaite résoudre l'équation $A \cup \mathbf{X} = B$, d'inconnue $\mathbf{X} \in \mathcal{P}(E)$.
   (a) Montrer qu'une condition nécessaire à l'existence de solutions est que $A \subset B$.
   (b) Analyse : supposons qu'il existe une solution $\mathbf{X} \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que $B \backslash A \subset \mathbf{X} \subset B$.
   (c) Faire la synthèse.
   (d) Conclure en donnant l'ensemble des solutions.
2. En raisonnant de même, résoudre l'équation $A \cap \mathbf{X} = B$, d'inconnue $\mathbf{X} \in \mathcal{P}(E)$.

Exercice 5: Déterminer $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[-1+\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right]$ et $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left[-1+\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right]$.

Applications

Exercice 6: Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elles sont injectives, surjectives ou bijectives entre des ensembles à préciser.

1. $x \mapsto x^2 - 4x + 3$.
2. $x \mapsto \sqrt{2x+3} - 1$
3. $x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$
4. $n \mapsto \begin{cases} \dfrac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{-(n+1)}{2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

Exercice 7: Soient f et g deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = 2n \text{ et } g(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} \text{ pour } n \text{ pair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Les applications f et g sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
2. Exprimer $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$, $f \circ f$, $f \circ f \circ f$ et $g \circ g \circ g$.
3. Ces applications sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

Exercice 8: Soient E, F et G trois ensembles.
Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et soit $g \in \mathcal{F}(F,G)$. Montrer que :

1. Si $g \circ f$ est injective de E dans G alors f est injective de E dans F.
2. Si $g \circ f$ est surjective de E dans G alors g est surjective de F dans G.
3. Que pensez-vous des réciproques ?

Exercice 9: Soit E et F deux ensembles. Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

1. On suppose qu'il existe $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$.
   Montrer que f est surjective.
2. On suppose qu'il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$.
   Montrer que f est injective.

__Exercice 10:__ Soient E et F deux ensembles. Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$. Montrer que :

1. $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. f est injective de E dans $F \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E),\ A = f^{-1}(f(A))$.
3. $\forall B \in \mathcal{P}(F),\ f(f^{-1}(B)) \subset B$.
4. f est surjective de E dans $F \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{P}(F),\ B = f(f^{-1}(B))$.

__Exercice 11:__ Soit E un ensemble. Soit $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$.
On définit une fonction sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X \mapsto (A \cap X\ ,\ B \cap X) \end{cases}$$

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que si $A \cup B = E$ alors f est injective.
3. Montrer que si $A \cap B = \varnothing$ alors f est surjective.
4. On suppose que f est bijective. Déterminer sa bijection réciproque.

__Exercice 12:__ Soit E un ensemble. On définit une relation sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$$

Montrer que $\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.

__Exercice 13:__ Soit $f : E \to [\![1;n]\!]$ une application surjective.
Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note $A_i = f^{-1}(\{i\})$.
Montrer que les $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ forment une partition de E.

__Exercice 14:__ [**] *Théorème de Cantor.* Soit E un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$.