

TD 3 : Ensembles et applications

Ensembles

Exercice 1: Soit E un ensemble et soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Montrer que

$$A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$$

Exercice 2: Décrire les éléments de $\mathcal{P}(\{0; 1\})$ puis de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0; 1\}))$.

Exercice 3: Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$.

1. Montrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
2. Comparer $\mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
3. Comparer $\mathcal{P}(A \times B)$ et $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

Exercice 4: Soit E un ensemble et soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$.

1. On souhaite résoudre l'équation $A \cup X = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.
 - (a) Montrer qu'une condition nécessaire à l'existence de solutions est que $A \subset B$.
 - (b) Analyse : supposons qu'il existe une solution $X \in \mathcal{P}(E)$.
Montrer que $B \setminus A \subset X \subset B$.
 - (c) Faire la synthèse.
 - (d) Conclure en donnant l'ensemble des solutions.
2. En raisonnant de même, résoudre l'équation $A \cap X = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

Exercice 5: Déterminer $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 + \frac{1}{n}; \frac{1}{n} \right]$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 + \frac{1}{n}; \frac{1}{n} \right]$.

Applications

Exercice 6: Montrer que l'application $n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ réalise une bijection de \mathbb{N} dans \mathbb{Z} .

Exercice 7: Soient f et g deux applications de \mathbb{N} dans \mathbb{N} définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = 2n \text{ et } g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{pour } n \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Les applications f et g sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
2. Exprimer $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$, $f \circ f$, $f \circ f \circ f$ et $g \circ g \circ g$.
3. Ces applications sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

Exercice 8: Soient E , F et G trois ensembles.

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et soit $g \in \mathcal{F}(F, G)$. Montrer que :

1. si $g \circ f$ est injective alors f est injective ;
2. si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
3. Que pensez-vous des réciproques ?

Exercice 9: Soit E et F deux ensembles. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

1. On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{F}(F, E)$ telle que $f \circ g = \text{id}_F$.
Montrer que f est surjective.
2. On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{F}(F, E)$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$.
Montrer que f est injective.

Exercice 10:

On considère la fonction de la variable réelle suivante $f : x \mapsto x^2 + 2x - 3$. Déterminer puis représenter graphiquement les ensembles suivants :

$$f(\mathbb{R}_+) ; f(\mathbb{R}_-) ; f^{-1}(\mathbb{R}_+) ; f^{-1}(\mathbb{R}_-)$$

Exercice 11:

Notons f l'application de la variable complexe suivante $f : z \mapsto z^2$.
Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f^{-1}(\mathbb{R})$ et $f^{-1}(\mathbb{U})$.

Exercice 12: Soient E et F deux ensembles. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Montrer que :

1. $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. f est injective $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A))$.
3. $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) \subset B$.
4. f est surjective $\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{P}(F), B = f(f^{-1}(B))$.

Exercice 13: Soit E un ensemble. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$.
On définit une fonction sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X \mapsto (A \cap X, B \cap X) \end{cases}$$

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que si $A \cup B = E$ alors f est injective.
3. Montrer que si $A \cap B = \emptyset$ alors f est surjective.
4. On suppose que f est bijective. Déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 14: Soit E un ensemble. On définit une relation sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$$

Montrer que $\mathbb{1}_{A \Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

Exercice 15: Soit $f : E \rightarrow \llbracket 1; n \rrbracket$ une application surjective.

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $A_i = f^{-1}(\{i\})$.

Montrer que les $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ forment une partition de E .

Exercice 16: [**] *Théorème de Cantor.* Soit E un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$.